**CURSO DE NIVELACIÓN INGRESO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**UNIDAD III: Funciones Reales**

**Contenido Conceptual:**

Funciones reales. Función polinómica. Función logarítmica- función exponencial. Definición. Representación gráfica. Características.

Problemas de aplicación.

**Utilidad del Concepto:**

El análisis funcional a partir de una ecuación o de una gráfica, permitirá conocer el

comportamiento de una función en su aplicación de representar modelos matemáticos,

aplicados a Economía, Física o Poblaciones.

**Objetivos Propuestos:**

* Reconocer analítica y gráficamente distintas funciones reales.
* Representar gráficamente las funciones polinómicas, logarítmica y exponencial.
* Determinar en forma gráfica dominio, imagen y raíces de las mismas.
* Resolver problemas de aplicación.

1. **FUNCIONES REALES:**

La funciones reales son funciones cuyo dominio y codominio son números reales.

Se expresa simbólicamente :

f: D 🡪IR dada por y = f(x) siendo D IR

Veremos ahora algunas funciones reales particulares:

1. **FUNCIONES POLINÓMICAS:**

Una función cuyo esquema es:

f: IR🡪IR dada por y = a0 + a1 x + a2 x2 + a3 x3 + ........ + an xn

es una *función polinómica*.

donde **n** es el grado de la función polinómica y los ai  son números reales, llamados coeficientes

Se las suele denominar simplemente polinomios.

Siempre el conjunto de partida y de llegada de una función polinómica es el conjunto IR de

los números reales, por esto cuando se trabaja con ellas puede obviarse el esquema

completo y se utiliza sólo la fórmula funcional.

*“El mayor exponente de la variable x es el grado de la función polinómica”.*

Ejemplos:

f(x) = 3x -1 es de grado uno y su gráfica es siempre una recta



g(x) = x 5 – 1 es de grado cinco



q(x) = - x 4 +4 x 2  es de grado cuatro

* **Función polinómica de grado 1 (*Función afín*)**

Son funciones de la forma : **f(x) = a.x + b**

Su gráfica es una recta donde **a** recibe el nombre de **pendiente** y **b ordenada al origen.**

Ej: f(x) = 3+2x a = 2 y b = 3

g(x) = 6x-5 a= -5 y b = 6

* **Función polinómica de grado 2 (*Función cuadrática*)**

Son funciones polinómicas definidas de la siguiente forma

**f(x) = a x2 + b x + c**

donde **a** es el coeficiente del término cuadrático

**b** es el coeficiente del término lineal

**c** es el coeficiente del término independiente

Ej:

f(x) = 3 x 2 + 2 x -5 f(x) = - 2 x 2 + 3

La representación gráfica en diagrama cartesiano de una función cuadrática es siempre una

curva llamada **parábola**.

Para graficarla recurrimos a buscar:

**1º) El vértice:** para ello existe una fórmula que nos permite hallar el valor de abscisa del

vértice: x v =

una vez obtenido el valor de abscisa x del vértice para determinar el valor de ordenada “y” sólo hay que sustituir el valor de “x” en la fórmula funcional

**2º) Las raíces:** las raíces se calculan con la fórmula resolvente

=

**3º) La ordenada al origen**: se obtiene reemplazando x = 0 en la función.

**Ejemplo 1: usando vértice, raíces y ordenada al origen**

y = x2 - 2 x + 1 a = 1, b = -2, c = 1

1º) El vértice x v = y v = 0

así el vértice es el punto V = (1,0)

2º) Las raíces

🡪 x 1 = x 2 =1

**Ejemplo 1 usando tabla de valores:**

y = x 2 - 2 x + 1

x y

3 4

2 1

1. 0

0 1

-1 4

**Ejemplo 2 usando vértice, raíces y ordenada al origen:**

y = x 2 + 2 x – 3 a = 1 b = 2 c = - 3

**1º) El vértice**

 → 

 → 

así el vértice es el punto V = (-1,-4)

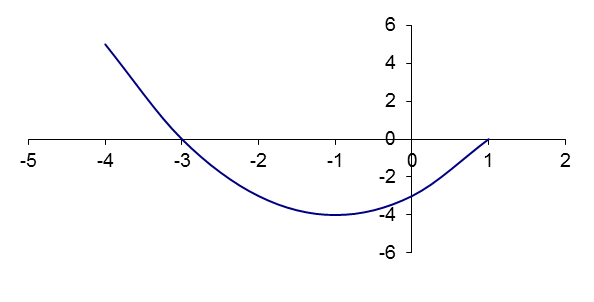
**2º) Las raíces**



→ 

  **así las raíces son: 1 y -3**

**3º) La ordenada al origen:**  así la ordenada al origen vale -3



RAIZ

RAIZ

VERTICE

ORDENADA AL ORIGEN

* **Funciones polinómicas de grado mayor a dos**

Para realizar la gráfica de estas funciones se ha de tener en cuenta el grado del polinomio y el signo del coeficiente dominante. Sabemos que su dominio es el conjunto de los números reales y el conjunto imagen estará sujeto al grado del polinomio.

**Relación del grado y signo del coeficiente dominante del polinomio con la gráfica:**

La gráfica correspondiente a la función subirá o bajará sin límite cuando x se mueve a la izquierda o

a la derecha; si el gráfico sube o baja se sabe por su grado (par o impar) y por el signo del coeficiente dominante.

**Vamos a considerar primero un polinomio de grado par. Sea an el coeficiente principal, es decir el correspondiente al término de mayor grado:**

* **Si a n > 0**

***Sube a la***

***izquierda***

izquierda

***Sube a la derecha***

y

x

* ***Si an < 0***

x

y

***Baja a la izquierda***

***Baja a la derecha***

Consideremos un polinomio de grado impar:

***Sube a la***

***derecha***

***Baja a la***

***izquierda***

y

x

* **Si an > 0**
* **Si a n < 0**

***Sube a la***

***izquierda***

***Baja a la***

***derecha***

x

y

**Relación de la gráfica con las raíces:**

Por el teorema fundamental de álgebra, sabemos que un polinomio tiene tantas raíces como lo indica su grado. Las consecuencias de este teorema son:

1. Un polinomio de grado **n**, tiene exactamente **n** raíces considerando las reales y no reales.
2. Un polinomio de grado **n** tiene como máximo **n** raíces reales.
3. Si un polinomio de grado **n**, tiene **n** raíces reales distintas entonces se puede factorizar de la siguiente manera: y = a n . ( x – x 1) . ( x – x 2) . ( x – x 3) ……( x – x n )

Donde **an**  es el coeficiente principal

Si alguna raíz está repetida, por ejemplo si **x1** está repetida 2 veces y **x2** está repetida 3 veces entonces la factorización queda:

y = a n . ( x – x 1)2 . ( x – x 2)3 . ( x – x 3) ……( x – x n)

la cantidad de veces que está repetida una raíz se llama **grado de multiplicidad** de la raíz, así **x1** tiene grado de multiplicidad 2 y **x2** tiene grado de multiplicidad 3.

Si el grado de multiplicidad de la raíz es par , la gráfica de la función polinómica rebota en el eje x. Si el grado de multiplicidad de las raíces es impar, la gráfica atraviesa al eje x.

1. Las raíces no reales se presentan de a pares, por eso un polinomio de grado impar, tiene por lo menos una raíz real ( es decir si z1= a + bi es una raíz también lo es su complejo conjugado z 2 = a - bi.)

Para hallar las raíces de un polinomio debemos factorizarlo, es decir expresarlo como producto de n factores.

Por ejemplo:

**y = x 3 –x 2**

factorizamos: y = x 2. ( x -1)

planteamos la ecuación: x 2. ( x -1) = 0 ⇒ las raíces son

x 1 = 0 x 2 = 1

pero el primer factor está elevado al cuadrado por lo tanto la raíz x 1= 0 tiene multiplicidad 2 ( par) ( rebota en el eje x)

y el segundo factor está elevado a la 1, por lo tanto la raíz x 2 = 1 tiene multiplicidad 1 ( impar) ( cruza al eje x)

Si queremos hacer un gráfico aproximado de la función aplicamos lo visto anteriormente:

* Por ser polinómica sabemos que es continua en todo su dominio
* Por ser de grado impar y coeficiente principal positivo , sube a la derecha y baja a la izquierda:
* Rebota en 0 y cruza al eje en 1

Gráficamente

1

**Otro ejemplo: y= x4 - 4x3 + 4x2**

* **raíces:**

factorizamos: y= x 2 . ( x -2 ) 2

planteamos la ecuación: x 2 . ( x -2 ) 2 = 0

las raíces son x 1 = 0 grado de multiplicidad par ( 2 ) rebota en el eje

x 2 = 2 grado de multiplicidad par ( 2 ) rebota en el eje

* por ser polinómica de grado par, y coeficiente principal positivo sube a la izquierda y derecha:

La gráfica aproximada es:



1. **FUNCIONES TRASCENDENTES**

* **Función exponencial:**

**f: IR 🡪IR dada por y = a x**

Donde **a** es un real positivo ( **a>0**), distinto de 1 ( a≠1), que se llama base de la función exponencial.

**Características:**

* + En este tipo de funciones el dominio es siempre el conjunto de los números reales (IR), y el conjunto imagen siempre los reales positivos ( IR +)
  + No tienen raíces
  + Intersecta al eje de ordenadas ( y ), en el punto (0.1)

Ejemplos:

a) y = 2x D = IR



b)  D = IR



c) y = e x D= IR

(Recuerde que el número **e** es un número irracional y su valor es aproximadamente

e = 2,718281……)



**Aclaración:**

* La función exponencial es creciente si su base es mayor a 1
* La función exponencial es decreciente si su base es menor a 1
* **Función logaritmo:**

**f : IR + 🡪IR dada por y = log b x**

Donde  **x** es el argumento del logaritmo, y  **b** es la base del logaritmo, el cual debe ser positivo (b>0) y distinto de 1 (b≠1).

**Características:**

* + En este tipo de funciones el dominio es siempre el conjunto de los números reales (IR+), y el conjunto imagen es siempre los reales ( IR )
  + Tiene una raíz donde el argumento es igual a 1 ( x = 1 )
  + No intersecta al eje de ordenadas ( eje y es asíntota vertical)

Ejemplos:

a) y = log x D = IR+



b)  D = IR+



c)  D = IR+



d) Si el logaritmo tiene como base al número **e** ( e = 2.7182…), se llama logaritmo natural y se anota

y = ln x



**Aclaración:**

* La función logaritmo es creciente si su base es mayor a 1
* La función logaritmo es decreciente si su base es menor a 1